

DEVOIR SURVEILLÉ 10

Calculatrice et documents non autorisés

PRÉAMBULE

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par $\forall (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x; y; z) = ((2\alpha+1)x - \alpha y + (\alpha+1)z; (\alpha-2)x + (\alpha-1)y + (\alpha-2)z; (2\alpha-1)x + (\alpha-1)y + (2\alpha-1)z).$$

Parmi les matrices suivantes, préciser la matrice M de l'endomorphisme f dans la base \mathcal{B} :

$$\begin{pmatrix} 2\alpha+1 & -\alpha & \alpha+1 \\ \alpha-2 & \alpha-1 & \alpha-2 \\ 2\alpha-1 & \alpha-1 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2\alpha+1 & \alpha-2 & 2\alpha-1 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha-1 \\ \alpha+1 & \alpha-2 & 2\alpha-1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

PARTIE A Dans cette partie, on suppose $\alpha = -1$.

1. Préciser alors la matrice M et son rang.
2. Montrer que le vecteur $v_1 = (3; 3; -5) \in \text{Ker } f$. En déduire une base de $\text{Ker } f$.
3. Chercher les vecteurs u solutions éventuelles de l'équation $f(u) = v_1$.
A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?
4. On pose $v_2 = (-1; 1; 1)$ et $v_3 = (1; -3; -3)$, montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et donner la matrice D de l'endomorphisme f dans cette nouvelle base \mathcal{B}' .
5. Donner P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . Calculer P^{-1} . Préciser la relation entre M , D , P et P^{-1} .
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser D^n . Donner le lien entre M^n et D^n .
7. Question bonus facultative : en déduire M^{2009} .

PARTIE B QCM Dans cette partie, on suppose $\alpha = 1$.

*Préciser sur votre feuille pour chaque question **les** réponses exactes sachant que chaque question possède exactement **deux bonnes réponses**. Aucune justification n'est demandée. Les deux bonnes réponses rapportent 1 point. Une seule réponse juste et pas de réponse fausse rapporte 0,5 point. Une réponse juste et une réponse fausse ou deux réponses fausses rapportent 0 point.*

Les 3 questions se situent au dos de cette feuille.

Question 1 Le sous-espace vectoriel $\text{Ker } f$ est :

- a) de dimension 1.
- b) de dimension 2.
- c) réduit au vecteur nul car f est bijectif.
- d) de dimension non nulle au plus égale à 3 car f n'est pas injective.

Question 2 Soit P le plan d'équation $y + z = 0$ et D la droite d'équations $x = y = z$. On a :

- a) $\text{Ker } f$ est inclus dans P .
- b) $\text{Ker } f + D = P$.
- c) $x = y = -z$ est un système d'équations de $\text{Ker } f$.
- d) $2e_1 + e_2 - e_3$ est un vecteur de $\text{Ker } f$.

Question 3 On a :

- a) D'après le théorème du rang, $\text{Im } f$ est de dimension au plus égale à 1.
- b) Le rang de la matrice M est égal à la dimension de $\text{Im } f$.
- c) $\text{Im } f = P + D$.
- d) $\text{Im } f + \text{Ker } f = P$.

PARTIE C Dans cette partie, on suppose $\alpha = \mathbf{0}$.

1. La matrice M est-elle inversible ?
2. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$.
A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?
3. Montrer que $M^2(M + I_3) = 2M$. En déduire que $M + I_3$ est une matrice inversible et donner son inverse (Indication $M = (M + I_3) - I_3$).
4. Montrer qu'il existe deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) telles que pour tout nombre entier $n > 2$, $M^n = u_n M^2 + v_n M$. L'expression des suites (u_n) et (v_n) n'est pas demandée, seule l'existence des suites est donc à prouver.

Fin du sujet