

## DEVOIR SURVEILLÉ 9

---

### Calculatrice et documents non autorisés

---

#### EXERCICE 1 (1 point)

Dans un examen, on demandait de donner le développement limité de la fonction  $f(x) = e^{\cos x}$  à l'ordre 3 en 0. Un étudiant donnait comme réponse :

$$f(x) = 3 + 4x - 5x^3 + o(x^3).$$

Expliquer pourquoi c'est évidemment faux.

---

#### EXERCICE 2 Vrai ou faux (4 points)

Préciser sur votre feuille pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Aucune justification n'est demandée.

On note  $f$  la fonction  $f(x) = a(x \ln(x) + 1) + bx$  :

a)  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

b) Le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 2 de la fonction  $f$  s'écrit :

$$(a+b) + (a+b)(x-1) - \frac{a}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

c) Le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 2 de la fonction  $f$  s'écrit :

$$(a+b) + (a+b)x + \frac{a}{2}x^2 + o(x^2).$$

d) La fonction  $\frac{f(x)}{(x-1)^2}$  a une limite finie en 1 si et seulement si  $b = -a$  et cette limite est dans ce cas égale à  $\frac{a}{2}$ .

---

#### EXERCICE 3 (3 points)

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = (x^2 + x + 1) \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Rappeler le  $DL_3(0)$  de  $\arctan x$  obtenu par intégration.
  2. Soit  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Préciser les asymptotes à  $C$  en l'infini et la position relative de  $C$  et de ses asymptotes.
- 

**EXERCICE 4** (12 points)

1. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $1 - \ln(1 - \frac{x}{2})$ .  
(b) Montrer que le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $\sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)$ .
2. On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 1 - \ln(1 - \frac{x}{2}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .
  - (b) Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0, en une fonction que l'on notera  $\tilde{f}$ . Préciser  $\tilde{f}(0)$ . La fonction  $\tilde{f}$  est-elle dérivable en 0? Si oui, que vaut  $\tilde{f}'(0)$ ?
  - (c) Donner une équation de la tangente en 0 à la courbe représentative de  $\tilde{f}$  et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
3. Soit  $F$  la primitive de  $x \mapsto x\sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}$  telle que  $F(0) = -1$ . Donner le développement limité de  $F$  à l'ordre 4 au voisinage de 0.
  4. Montrer que la courbe représentative de  $g : x \mapsto \sqrt{x^3}f(x)$  admet une asymptote au voisinage de  $+\infty$ . En donner une équation, et déterminer la position de la courbe par rapport à cette asymptote au voisinage de  $+\infty$ .
  5. *Question bonus. 2 points.*
    - (a) Donner le développement limité de  $f$  à l'ordre 2 au voisinage de  $-4$ .
    - (b) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $-4$  et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de  $-4$  uniquement.
- 

**Fin du sujet.**

---