PARTIEL DE MATHÉMATIQUES MODULE 3

Calculatrice et documents non autorisés

EXERCICE 1. *10 points.*
On se place dans $\mathbb{R}^3$ considéré comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel dont la base canonique est $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Ainsi si $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$ on pourra noter aussi $X = (x, y, z)$.

Rappel
Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $u = (x_1, x_2, x_3)$ et $v = (y_1, y_2, y_3)$.
On définit

1. le produit scalaire de u et v dans $\mathbb{R}^3$ en posant

$$(u.v) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

   Ainsi le produit scalaire de u et v est un nombre.

2. le produit vectoriel u et v dans $\mathbb{R}^3$ en posant

$$u \wedge v = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

   Ainsi le produit vectoriel de u et v est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Définition
Soit α, β, δ trois réels quelconques. Soient u, v, w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On note f, l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que pour tout $X \in \mathbb{R}^3$:

$$f(X) = \alpha\,(X.u)\,v + \beta X + \delta X \wedge w$$

On suppose que : $u = v = e_1 + e_2 + e_3$ et $w = -5e_1 + e_2 + e_3$, $\alpha = 3, \beta = -3$ et $\delta = 1$.

1. Calculer le produit scalaire $(X.u)$ et le produit vectoriel $X \wedge w$.
2. En déduire que $f(X) = (4y + 2z)e_1 + (2x - 2z)e_2 + (4x + 8y)e_3$.
3. Montrer que f ainsi définie est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
4. Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Ker} f$. f est il bijectif ?
5. Quelle est la dimension de $\operatorname{Im} f$?
6. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
7. A t-on : $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?
8. Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1, f(e_1), f(f(e_1)))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 2. *10 points.*

1. Déterminer le $DL_5(0)$ de $f(x) = \tan^3(x).(\cos x - 1)$
2. Déterminer le $DL_2(0)$ de $f(u) = \ln(2+u)$ puis celui de $f(t) = \ln\left(e^t + \sqrt{1+t^2}\right)$. En déduire le $DL_3(0)$ de $F(x) = \int_0^x \ln\left(e^t + \sqrt{1+t^2}\right) dt$.
3. Déterminer la limite suivante :
$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x . \sin x}}$$
On pensera à écrire $(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x . \sin x}}$ sous la forme d'une exponentielle en se rappelant que $a^x = e^{x \ln a}$.
4. Déterminer l'asymptote oblique en $+\infty$ et la position de la courbe par rapport à son asymptote oblique de la courbe représentative de la fonction : $f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan}(x)$.
On rappelle que pour tout $x > 0, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Fin du sujet